Типові задачі до фахового іспиту на здобуття ОС «МАГІСТР»

1. Перевірити систему з характеристичним рівнянням $2p^3+4p^2+3p+1=0$ на стійкість.

$$2p^3+4p^2+3p+1=0$$
$$a_0=2>0;\ a_1=4>0;\ a_2=3>0;\ a_3=1>0:$$
$$a_1a_2-a_0a_3=4\cdot 3-2\cdot 1=10>0$$

Всі умови виконуються, тобто система стійка)

2. Система, що має вхідний сигнал $\psi(t)$ та вихідний сигнал $\varphi(t)$, описана диференційним рівнянням $2\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}+12\frac{d\varphi(t)}{dt}+8\varphi(t)=4\frac{d\psi(t)}{dt}+6\psi(t)$. Визначити модель в просторі станів для цієї системи.

$$2\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}+12\frac{d\varphi(t)}{dt}+8\varphi(t)=4\frac{d\psi(t)}{dt}+6\psi(t)$$

$$\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}+6\frac{d\varphi(t)}{dt}+4\varphi(t)=2\frac{d\psi(t)}{dt}+3\psi(t)$$

$$\varphi(t)=x_2(t);\ \frac{d\varphi(t)}{dt}=\dot{x}_2(t)=x_1(t);\ \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}=\dot{x}_1(t)$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-6x_1(t)-4x_2(t)+b_1u(t)\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)+b_2u(t)\end{cases}$$
$$y(t)=\varphi(t)=x_2(t)+b_0u(t)$$

$$\begin{vmatrix}1 & 6 & 4\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_1\\ b_2\\ b_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3\\ 2\\ 0\end{vmatrix}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 6 & 4\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1;\ \Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 6 & 4\\ 2 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=3-12=-9;\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=2;\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 6 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$b_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-9;\ b_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=2;\ b_0=\frac{\Delta_3}{\Delta}=0$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -4\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-9\\ 2\end{bmatrix}\cdot u(t);\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+[0]\cdot u(t)$$

3. Визначити H_2 – норму неперервної системи, яка представлена у вигляді моделі в просторі станів

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\cdot u(t);\ y(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+[0]\cdot u(t)$$

$$AG_c+G_cA^T+BB^T=0$$

$$\begin{bmatrix}-4 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-4 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4g_{11}-2g_{12} & -4g_{12}-2g_{22} \\ g_{11} & g_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4g_{11}-2g_{12} & g_{11} \\ -4g_{12}-2g_{22} & g_{12} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -4g_{11}-2g_{12}-4g_{11}-2g_{12}=-4 \\ -4g_{12}-2g_{22}+g_{11}=2 \\ g_{11}-4g_{12}-2g_{22}=2 \\ g_{12}+g_{12}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8g_{11}-4g_{12}=-4 \\ g_{11}-4g_{12}-2g_{22}=2 \\ 2g_{12}=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8g_{11}-4\cdot(-0.5)=-4 \\ g_{11}-4(-0.5)-2g_{22}=2 \\ g_{12}=-0.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8g_{11}-4\cdot(-0.5)=-4 \\ g_{11}-4(-0.5)-2g_{22}=2 \\ g_{12}=-0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8g_{11}+2=-4 \\ g_{11}+2-2g_{22}=2 \\ g_{12}=-0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8g_{11}=-6 \\ g_{11}-2g_{22}=0 \\ g_{12}=-0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11}=0.75 \\ 0.75-2g_{22}=0 \\ g_{12}=-0.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g_{11}=0.75 \\ g_{22}=0.375 \\ g_{12}=-0.5 \end{cases}$$

$$G_c = \begin{bmatrix} 0.75 & -0.5 \\ -0.5 & 0.375 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \sqrt{tr\left(C\cdot G_c \cdot C^T\right)} = \sqrt{\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.75 & -0.5 \\ -0.5 & 0.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{0.375} = 0.612$$

4. Перевірити систему з характеристичним рівняння $z^2+5z+7=0$ на стійкість.

$z^2+5z+7=0$

$Q(1)=1+5+7=13>0$

$(-1)^2 Q(-1)=1-5+7=3>0$

$|a_0|<a_1 \qquad |7|>1$

Так як не виконується одна з умов можна зробити висновок, що система нестійка.

5. Визначити керованість системи, яка представлена в просторі станів четвіркою матриць: $A=\begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$; $D=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$

$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} \end{bmatrix}$

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0.4 & 1 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4\cdot 0.2 + 1\cdot 1 \\ 1\cdot 0.2 + 0.1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.08 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.08 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad \det \mathbf{Q}_k = \begin{vmatrix} 0.2 & 1.08 \\ 1 & 0.3 \end{vmatrix} = 0.2\cdot 0.3 - 1\cdot 1.08 = -1.02$$

$rank\mathbf{Q}_k = 2$

Ранг матриці керованості дорівнює порядку системи, то можна зробити висновок, що система повністю керована